Übungsaufgaben mit Lösungen zu Lineargleichungssystemen

Wolfgang Kippels

26. Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese und ähnliche Anleitungen zu erstellen erfordert sehr viel Zeit und Mühe. Trotzdem stelle ich alles kostenfrei der Allgemeinheit zur Verfügung. Wenn Sie diese Datei hilfreich finden, dann bitte ich Sie um Erfüllung des nachfolgend beschriebenen „Generationenvertrages“:

> *Wenn Sie später einmal Ihre Ausbildungsphase beendet haben und im Beruf stehen (oder auch noch danach), geben Sie bitte Ihr Wissen in geeigneter Form an die nachfolgende Generation weiter.*

Wenn Sie mir eine Freude machen wollen, dann schreiben Sie mir bitte eine kleine Email an die folgende Adresse: mail@dk4ek.de

Vielen Dank!

2 Einleitung

Zur Lösung von Lineargleichungssystemen können unterschiedliche Lösungsverfahren verwendet werden. In den Musterlösungen am Schluss werden folgende Verfahren verwendet:

- Das Einsetzungsverfahren
- Das Additions-/Subtraktionsverfahren
- Die Cramersche Regel

Einzelheiten zu den Verfahren sind hier zu finden:

Einsetzungsverfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/einsetz.pdf
Additions-/Subtr.-Verfahren: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/add.pdf
Cramersche Regel: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/cramer.pdf

Darüber hinaus existieren auch noch andere Verfahren wie das Gleichsetzungsverfahren[1] oder das Gauß-Jordan-Verfahren[2], die hier aber nicht angewendet wurden.

3 Übungsaufgaben

3.1 Aufgabe 1

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2x-3y & = & 12 \\ (2) & 5x+2y & = & 11 \end{array}$$

3.2 Aufgabe 2

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x-5y & = & 5 \\ (2) & 5x+4y & = & -22 \end{array}$$

3.3 Aufgabe 3

$$\begin{array}{lrcl} (1) & -2x+5y & = & -2 \\ (2) & 4x-9y & = & 4 \end{array}$$

3.4 Aufgabe 4

$$\begin{array}{lrcl} (1) & -3x+5y & = & -16 \\ (2) & 3x-9y & = & 24 \end{array}$$

[1]Näheres zum Gleichsetzungsverfahren siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/lingl.pdf
[2]Näheres zum Gauß-Jordan-Verfahren siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/gauss.pdf

3.5 Aufgabe 5

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & 5x - 2y + 3z & = & 19 \\
(2) & 2x + 2y - 4z & = & -6 \\
(3) & -2x + 3y + z & = & -12
\end{array}$$

3.6 Aufgabe 6

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & \frac{3}{2}x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{3}z & = & -5 \\
(2) & \frac{3}{4}x - \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z & = & -\frac{45}{2} \\
(3) & -\frac{5}{2}x + \frac{5}{4}y - \frac{1}{9}z & = & \frac{43}{2}
\end{array}$$

3.7 Aufgabe 7

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & 0{,}5x + 3z - 4y & = & -15 \\
(2) & 2y - z + 3x & = & 14 \\
(3) & 0{,}7z + 8{,}8x - 2{,}6y & = & 7{,}2
\end{array}$$

3.8 Aufgabe 8

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & 2{,}3x + z & = & -6{,}6 \\
(2) & 5{,}8y + x & = & -13{,}6 \\
(3) & 2{,}3z + y & = & -6{,}6
\end{array}$$

3.9 Aufgabe 9

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & 3x - 2y + 4z & = & 6 \\
(2) & 5x + 2y - 3z & = & 4 \\
(3) & 3x + 4y - 7z & = & -2
\end{array}$$

3.10 Aufgabe 10

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & 3x - 5z & = & 1 \\
(2) & 3x - 4y & = & 3 \\
(3) & z - 2y & = & 4
\end{array}$$

3.11 Aufgabe 11

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & 5x - 4y + 6z & = & 7 \\
(2) & 2x + 3y - 2z & = & 4 \\
(3) & 9x + 2y + 2z & = & 12
\end{array}$$

3.12 Aufgabe 12

$$\begin{array}{rrcl}
(1) & 3x - z + 2y & = & -4 \\
(2) & 3z - 2x + 5y & = & 12 \\
(3) & 5y - 5z + 3x & = & -20
\end{array}$$

3.13 Aufgabe 13

$$\begin{array}{lrcl} (1) & -5x+3z & = & -14 \\ (2) & -4z+2x+3y & = & 13 \\ (3) & 3y+5z & = & -12 \end{array}$$

3.14 Aufgabe 14

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 4x+3y+z & = & 0 \\ (2) & 3x+4y+5z & = & 0 \\ (3) & x-2y+z & = & 0 \end{array}$$

3.15 Aufgabe 15

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2ax+ay+z & = & a \\ (2) & ax+0{,}5by+bz & = & b^2 \\ (3) & ax+2ay-2bz & = & ab \end{array}$$

3.16 Aufgabe 16

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x-3y+4z & = & 1 \\ (2) & 2x+4y-2z & = & -14 \\ (3) & 3x-5y+3z & = & 3 \end{array}$$

3.17 Aufgabe 17

$$\begin{array}{lrcl} (1) & abx-2aby+2bz & = & 3ab \\ (2) & -2ax+4by+10z & = & a-4b \\ (3) & 3bx-6ay & = & 0 \end{array}$$

3.18 Aufgabe 18

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2ax-by & = & 4a^2+b^2 \\ (2) & 2b(x+y)-a(x-y) & = & 6ab \end{array}$$

3.19 Aufgabe 19

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2x_1+3x_2+3x_4 & = & 3 \\ (2) & 3x_1-2x_3-4x_4 & = & 3 \\ (3) & 4x_2-x_3+4x_4 & = & -3 \\ (4) & 3x_1+2x_2+x_3 & = & 2 \end{array}$$

3.20 Aufgabe 20

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 3 \\
(2) & x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 3 \\
(3) & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 8 \\
(4) & 6x_1 - 5x_2 - 8x_3 + 2x_4 & = & 20
\end{array}$$

4 Lösungen

4.1 Aufgabe 1

$L = \{(3|-2)\}$

4.2 Aufgabe 2

$L = \{(-2|-3)\}$

4.3 Aufgabe 3

$L = \{(1|0)\}$

4.4 Aufgabe 4

$L = \{(2|-2)\}$

4.5 Aufgabe 5

$L = \{(2|-3|1)\}$

4.6 Aufgabe 6

$L = \{(-4|10|9)\}$

4.7 Aufgabe 7

$L = \{(2|4|0)\}$

4.8 Aufgabe 8

$L = \{(-2|-2|-2)\}$

4.9 Aufgabe 9

$L = \{(0|17|10)\}$

4.10 Aufgabe 10

$L = \{(-3|-3|-2)\}$

4.11 Aufgabe 11

Das Gleichungssystem ist unstimmig, also *nicht* lösbar. Es gibt *keine einzige* Lösung.

4.12 Aufgabe 12

$L = \{(0|0|4)\}$

4.13 Aufgabe 13

$L = \{(1|1| - 3)\}$

4.14 Aufgabe 14

$L = \{(0|0|0)\}$

4.15 Aufgabe 15

$L = \{(-b|2b|a)\}$

4.16 Aufgabe 16

$L = \{(-3|0|4)\}$

4.17 Aufgabe 17

$L = \left\{\left(\frac{2a}{a-b}|\frac{b}{a-b}|\frac{a}{2}\right)\right\}$

4.18 Aufgabe 18

$L = \{(2a+b|2a-b)\}$

4.19 Aufgabe 19

$L = \{(3| - 3| - 1|2)\}$

4.20 Aufgabe 20

$L = \{(2| - 2|0| - 1)\}$

5 Komplette Lösungswege

Im Folgenden werden die Gleichungssysteme beispielhaft mit unterschiedlichen Lösungsmethoden gelöst. Im Prinzip ist aber **jede** Aufgabe mit **jedem** Lösungsverfahren lösbar.

5.1 Aufgabe 1

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2x-3y & = & 12 \\ (2) & 5x+2y & = & 11 \end{array} \qquad D=\mathbb{R}^2$$

Hier drängt sich einem kein bestimmtes Lösungsverfahren auf. Willkürlich wähle ich das Additions-/Subtraktionsverfahren.

Ich möchte y eliminieren. Daher multipliziere ich die erste Gleichung mit 2 und die zweite mit 3.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & 2x-3y & = & 12 & |\cdot 2 \\ (2) & 5x+2y & = & 11 & |\cdot 3 \\ \hline (1) & 4x-6y & = & 24 & | \\ (2) & 15x+6y & = & 33 & |+ \\ \hline & 19x & = & 57 & |:19 \\ & x & = & 3 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in die erste Gleichung ein, um y zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcll} 2x-3y & = & 12 & \\ 2\cdot 3-3y & = & 12 & \\ 6-3y & = & 12 & |-6 \\ -3y & = & 6 & |:(-3) \\ y & = & -2 & \end{array}$$

$$\boxed{L=\{(3|-2)\}}$$

5.2 Aufgabe 2

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x - 5y & = & 5 \\ (2) & 5x + 4y & = & -22 \end{array} \qquad D = \mathbb{R}^2$$

Bei diesem Gleichungssystem muss man nicht lange nachdenken. Die Koeffizienten (Vorzahlen) von x sind gleich, daher bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an. Da die Vorzeichen gleich sind (positiv), muss subtrahiert werden. Ich subtrahiere die obere von der unteren Gleichung, damit y positiv bleibt.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & 5x - 5y & = & 5 & |- \\ (2) & 5x + 4y & = & -22 & | \\ \hline & 9y & = & -27 & | : 9 \\ & y & = & -3 & \end{array}$$

Zur Bestimmung von x setze ich den Wert in die erste Gleichung ein.

$$\begin{array}{rcll} 5x - 5y & = & 5 & \\ 5x - 5 \cdot (-3) & = & 5 & \\ 5x + 15 & = & 5 & | - 15 \\ 5x & = & -10 & \\ x & = & -2 & \end{array}$$

$$\boxed{L = \{(-3|-2)\}}$$

5.3 Aufgabe 3

$$\begin{array}{lrcl} (1) & -2x + 5y & = & -2 \\ (2) & 4x - 9y & = & 4 \end{array} \qquad D = \mathbb{R}^2$$

Auch hier bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an, denn es muss nur die erste Gleichung mit 2 multipliziert werden, damit die Vorzahlen von x gleich sind.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & -2x + 5y & = & -2 & | \cdot 2 \\ (2) & 4x - 9y & = & 4 & \\ \hline & -4x + 10y & = & -4 & | \\ & 4x - 9y & = & 4 & |+ \\ \hline & y & = & 0 & \end{array}$$

Das ging flott. Zur Bestimmung von y setze ich den Wert in die erste Gleichung ein.

$$\begin{array}{rcll} -2x + 5y & = & -2 & \\ -2x + 5 \cdot 0 & = & -2 & \\ -2x & = & -2 & | : (-2) \\ x & = & 1 & \end{array}$$

$$\boxed{L = \{(1|0)\}}$$

5.4 Aufgabe 4

$$\begin{array}{lrcl} (1) & -3x + 5y & = & -16 \\ (2) & 3x - 9y & = & 24 \end{array} \qquad D = \mathbb{R}^2$$

Auch bei diesem Gleichungssystem muss man nicht lange nachdenken. Die Koeffizienten (Vorzahlen) von x sind gleich, daher bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an. Da die Vorzeichen unterschiedlich sind, muss addiert werden. Ich subtrahiere die obere von der unteren Gleichung, damit y positiv bleibt.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & -3x + 5y & = & -16 & | \\ (2) & 3x - 9y & = & 24 & |+ \\ \hline & -4y & = & 8 & | : (-4) \\ & y & = & -2 & \end{array}$$

Das Ergebnis kann beispielsweise in Gleichung (2) eingesetzt werden.

$$\begin{array}{rcll} 3x - 9y & = & 24 & \\ 3x - 9 \cdot (-2) & = & 24 & \\ 3x + 18 & = & 24 & | - 18 \\ 3x & = & 6 & | : 3 \\ x & = & 2 & \end{array}$$

$$\boxed{L = \{(2| - 2)\}}$$

5.5 Aufgabe 5

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x-2y+3z & = & 19 \\ (2) & 2x+2y-4z & = & -6 \\ (3) & -2x+3y+z & = & -12 \end{array} \qquad D=\mathbb{R}^3$$

Da in Gleichung (3) die Variable z allein steht, wähle ich das Einsetzungsverfahren aus. Gleichung (3) wird nach z aufgelöst.

$$\begin{array}{lrcll} (3) & -2x+3y+z & = & -12 & \mid +2x-3y \\ (4) & z & = & -12+2x-3y & \end{array}$$

Dieses Ergebnis wird in Gleichung (1) und Gleichung (2) eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcll} (1) & 5x-2y+3z & = & 19 & \\ (2) & 2x+2y-4z & = & -6 & \\ \hline (1a) & 5x-2y+3\cdot(-12+2x-3y) & = & 19 & \\ (2a) & 2x+2y-4\cdot(-12+2x-3y) & = & -6 & \\ \hline (1a) & 5x-2y-36+6x-9y & = & 19 & \mid +36 \\ (2a) & 2x+2y+48-8x+12y & = & -6 & \mid -48 \\ \hline (1a) & 11x-11y & = & 55 & \\ (2a) & -6x+14y & = & -54 & \\ \hline \end{array}$$

Damit haben wir das Gleichungssystem auf ein System 2. Ordnung reduziert. Für den nächsten Reduktionsschritt verwende ich erneut das Einsetzungsverfahren, da Gleichung (1a) gut durch 11 dividiert werden kann.

$$\begin{array}{lrcll} (1a) & 11x-11y & = & 55 & \mid :11 \\ & x-y & = & 5 & \mid +y \\ (5) & x & = & 5+y & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (2a) eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcll} (2a) & -6x+14y & = & -54 & \\ & -6\cdot(5+y)+14y & = & -54 & \\ & -30-6y+14y & = & -54 & \mid +30 \\ & 8y & = & -24 & \mid :8 \\ & y & = & -3 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (5) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} x & = & 5+y \\ x & = & 5-3 \\ x & = & 2 \end{array}$$

Beide Ergebnisse werden in Gleichung (4) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcl} z & = & -12+2x-3y \\ z & = & -12+2\cdot 2-3\cdot(-3) \\ z & = & -12+4+9 \\ z & = & 1 \end{array}$$

$$\boxed{L=\{(2|-3|1)\}}$$

5.6 Aufgabe 6

$$\begin{array}{lrrrcrr}
(1) & \frac{3}{2}x & +\frac{2}{5}y & -\frac{1}{3}z & = & -5 & \\
(2) & \frac{3}{4}x & -\frac{3}{2}y & -\frac{1}{2}z & = & -\frac{45}{2} & \\
(3) & -\frac{5}{2}x & +\frac{5}{4}y & -\frac{1}{9}z & = & \frac{43}{2} & \qquad D = \mathbb{R}^3
\end{array}$$

Mit diesen Brüchen lässt sich schlecht rechnen. Daher wird jede Gleichung zunächst mit ihrem Hauptnenner multipliziert.

$$\begin{array}{lrrrcrl}
(1) & \frac{3}{2}x & +\frac{2}{5}y & -\frac{1}{3}z & = & -5 & \mid\cdot 30 \\
(2) & \frac{3}{4}x & -\frac{3}{2}y & -\frac{1}{2}z & = & -\frac{45}{2} & \mid\cdot 4 \\
(3) & -\frac{5}{2}x & +\frac{5}{4}y & -\frac{1}{9}z & = & \frac{43}{2} & \mid\cdot 36 \\
\hline
(1a) & 45x & +12y & -10z & = & -150 & \\
(2a) & 3x & -6y & -2z & = & -90 & \\
(3a) & -90x & +45y & -4z & = & 774 &
\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem löse ich mit der **Cramerschen Regel**.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} -150 & 12 & -10 \\ -90 & -6 & -2 \\ 774 & 45 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 45 & 12 & -10 \\ 3 & -6 & -2 \\ -90 & 45 & -4 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-3\,600 - 18\,576 + 40\,500 - 46\,440 - 13\,500 - 4\,320}{1\,080 + 2\,160 - 1\,350 + 5\,400 + 4\,050 + 144} \\
&= \frac{-45\,936}{11\,484} \\
x &= -4
\end{aligned}$$

Da bei der Berechnung von y der gleiche Nenner auftritt, kann dort sofort der Zahlenwert 11 484 eingesetzt werden.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{\begin{vmatrix} 45 & -150 & -10 \\ 3 & -90 & -2 \\ -90 & 774 & -4 \end{vmatrix}}{11\,484} \\
&= \frac{16\,200 - 27\,000 - 23\,220 + 81\,000 + 69\,660 - 1\,800}{11\,484} \\
&= \frac{114\,840}{11\,484} \\
y &= 10
\end{aligned}$$

Die Variable z wird am besten durch Einsetzen der ersten beiden Lösungen in eine der Gleichung bestimmt. Hierzu wähle ich Gleichung (2a) aus.

$$\begin{aligned}
3x - 6y - 2z &= -90 && |-3x+6y \\
-2z &= -90 - 3x + 6y && \\
-2z &= -90 - 3 \cdot (-4) + 6 \cdot 10 && \\
-2z &= -90 + 12 + 60 && \\
-2z &= -18 && |:(-2) \\
z &= 9 &&
\end{aligned}$$

$$\boxed{L = \{(-4|10|9)\}}$$

5.7 Aufgabe 7

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 0{,}5x + 3z - 4y & = & -15 \\
(2) & 2y - z + 3x & = & 14 \\
(3) & 0{,}7z + 8{,}8x - 2{,}6y & = & 7{,}2 \qquad\qquad D = \mathbb{R}^3
\end{array}$$

Zur Abwechslung nehme ich für den ersten Reduktionsschritt das Einsetzungsverfahren, da sich Gleichung (2) leicht nach z umstellen lässt.

$$\begin{array}{lrcll}
(2) & 2y - z + 3x & = & 14 & \mid -2y - 3x \\
 & -z & = & 14 - 2y - 3x & \mid : (-1) \\
(4) & z & = & -14 + 2y + 3x &
\end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1) und in Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcll}
(1) & 0{,}5x + 3z - 4y & = & -15 & \\
(3) & 0{,}7z + 8{,}8x - 2{,}6y & = & 7{,}2 & \\
\hline
(1a) & 0{,}5x + 3 \cdot (-14 + 2y + 3x) - 4y & = & -15 & \\
(3a) & 0{,}7 \cdot (-14 + 2y + 3x) + 8{,}8x - 2{,}6y & = & 7{,}2 & \\
\hline
(1a) & 0{,}5x - 42 + 6y + 9x - 4y & = & -15 & \mid +42 \\
(3a) & -9{,}8 + 1{,}4y + 2{,}1x + 8{,}8x - 2{,}6y & = & 7{,}2 & \mid +9{,}8 \\
\hline
(1a) & 9{,}5x + 2y & = & 27 & \\
(3a) & 10{,}9x - 1{,}2y & = & 17 &
\end{array}$$

Damit ist der erste Reduktionsschritt fertig, wir haben ein Gleichungssystem von nur noch 2. Ordnung erhalten. Für die weitere Lösung verwende ich die Cramersche Regel.

$$\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix} 27 & 2 \\ 17 & -1{,}2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9{,}5 & 2 \\ 10{,}9 & -1{,}2 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-32{,}4 - 34}{-11{,}4 - 21{,}8} \\
&= \frac{-66{,}4}{-33{,}2} \\
x &= 2
\end{aligned}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1a) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll}
9{,}5x + 2y & = & 27 & \\
9{,}5 \cdot 2 + 2y & = & 27 & \\
19 + 2y & = & 27 & \mid -19 \\
2y & = & 8 & \mid : 2 \\
y & = & 4 &
\end{array}$$

Beide Ergebnisse werden in Gleichung (4) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
z &= -14 + 2y + 3x \\
z &= -14 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \\
z &= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{L = \{(2|4|0)\}}$$

5.8 Aufgabe 8

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2{,}3x + z & = & -6{,}6 \\ (2) & 5{,}8y + x & = & -13{,}6 \\ (3) & 2{,}3z + y & = & -6{,}6 \end{array} \qquad D = \mathbb{R}^3$$

Zunächst bringe ich das Gleichungssystem in die Normalform.

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & 2{,}3x & & +z & = & -6{,}6 \\ (2) & x & +5{,}8y & & = & -13{,}6 \\ (3) & & y & +2{,}3z & = & -6{,}6 \end{array}$$

Wegen der vielen Lücken bietet sich die Cramersche Regel zur Lösung an.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -6{,}6 & 0 & 1 \\ -13{,}6 & 5{,}8 & 0 \\ -6{,}6 & 1 & 2{,}3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2{,}3 & 0 & 1 \\ 1 & 5{,}8 & 0 \\ 0 & 1 & 2{,}3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{-\,88{,}044 + 0 - 13{,}6 + 38{,}28 - 0 - 0}{30{,}682 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0} \\ &= \frac{-\,63{,}364}{31{,}682} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann zur Bestimmung von z in Gleichung (1) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 2{,}3x + z &= -6{,}6 \\ 2{,}3 \cdot (-2) + z &= -6{,}6 \\ -4{,}6 + z &= -6{,}6 \quad | + 4{,}6 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann zur Bestimmung von y in Gleichung (3) eingesetzt werden.

$$\begin{aligned} 2{,}3z + y &= -6{,}6 \\ 2{,}3 \cdot (-2) + y &= -6{,}6 \\ -4{,}6 + y &= -6{,}6 \quad | + 4{,}6 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

$$\boxed{L = \{(-2|-2|-2)\}}$$

5.9 Aufgabe 9

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 3x-2y+4z & = & 6 \\ (2) & 5x+2y-3z & = & 4 \\ (3) & 3x+4y-7z & = & -2 \end{array} \qquad D=\mathbb{R}^3$$

Zur Abwechslung verwende ich hier das Additions-/Subtraktionsverfahren. Ich will im ersten Reduktionsschritt die Variable y eliminieren. Dazu addiere ich zunächst Gleichung (1) mit (2).

$$\begin{array}{lrrrcrl} (1) & 3x & -2y & +4z & = & 6 & | \\ (2) & 5x & +2y & -3z & = & 4 & |+ \\ \hline (4) & 8x & & +z & = & 10 & \end{array}$$

Anschließend verdopple ich Gleichung (1), damit ich sie zu Gleichung (3) addieren kann.

$$\begin{array}{lrrrcrl} (1) & 3x & -2y & +4z & = & 6 & |\cdot 2 \\ (3) & 3x & +4y & -7z & = & -2 & \\ \hline (1) & 6x & -4y & +8z & = & 12 & | \\ (3) & 3x & +4y & -7z & = & -2 & |+ \\ \hline (5) & 9x & & +z & = & 10 & \end{array}$$

Mit Gleichung (4) und (5) haben wir nun ein Gleichungssystem von nur noch 2. Ordnung. Es bietet sich an, die Gleichungen voneinander zu subtrahieren.

$$\begin{array}{lrrcrl} (4) & 8x & +z & = & 10 & |- \\ (5) & 9x & +z & = & 10 & | \\ \hline & x & & = & 0 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (4) eingesetzt, um y zu bestimmen.

$$\begin{array}{rcl} 8x+z & = & 10 \\ 8\cdot 0+z & = & 10 \\ z & = & 10 \end{array}$$

Beide Ergebnisse werden in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} 3x-2y+4z & = & 6 & \\ 3\cdot 0-2y+4\cdot 10 & = & 6 & \\ -2y+40 & = & 6 & |-40 \\ -2y & = & -34 & |:(-2) \\ y & = & 17 & \end{array}$$

$$\boxed{L=\{(0|17|10)\}}$$

5.10 Aufgabe 10

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 3x - 5z & = & 1 \\ (2) & 3x - 4y & = & 3 \\ (3) & z - 2y & = & 4 \end{array} \qquad D = \mathbb{R}^3$$

Dieses Gleichungssystem sollte zunächst in die Normalfform gebracht werden, damit es übersichtlicher wird.

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & 3x & & -5z & = & 1 \\ (2) & 3x & -4y & & = & 3 \\ (3) & & -2y & +z & = & 4 \end{array}$$

Es bietet sich das Additions-/Subtraktionsverfahren an. Man kann Gleichung (3) mit 2 multiplizieren und von Gleichung (2) subtrahieren, damit y wegfällt.

$$\begin{array}{lrrrcll} (2) & 3x & -4y & & = & 3 & \\ (3) & & -2y & +z & = & 4 & |\cdot 2 \\ \hline (2) & 3x & -4y & & = & 3 & | \\ (3) & & -4y & +2z & = & 8 & |- \\ \hline (4) & 3x & & -2z & = & -5 & \end{array}$$

Übrig bleiben zwei Gleichungen mit nur noch zwei Variablen. Es ist zweckmäßig, die Gleichungen sofort voneinander zu subtrahieren.

$$\begin{array}{lrrcll} (1) & 3x & -5z & = & 1 & | \\ (4) & 3x & -2z & = & -5 & |- \\ \hline (5) & & -3z & = & 6 & |:(-3) \\ & & z & = & -2 & \end{array}$$

Das Ergebnis setze ich in (1) ein.

$$\begin{array}{rcll} 3x - 5z & = & 1 & \\ 3x - 5\cdot(-2) & = & 1 & \\ 3x + 10 & = & 1 & | - 10 \\ 3x & = & -9 & |:3 \\ x & = & -3 & \end{array}$$

Dieses Ergebnis kann in (2) eingsetzt werden.

$$\begin{array}{rcll} 3x - 4y & = & 3 & \\ 3\cdot(-3) - 4y & = & 3 & \\ -9 - 4y & = & 3 & | + 9 \\ -4y & = & 12 & |:(-4) \\ y & = & -3 & \end{array}$$

$$\boxed{L = \{(-3|-3|-2)\}}$$

5.11 Aufgabe 11

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x - 4y + 6z & = & 7 \\ (2) & 2x + 3y - 2z & = & 4 \\ (3) & 9x + 2y + 2z & = & 12 \qquad\qquad D = \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Lösungsvariante 1: Es liegen keinerlei Besonderheiten vor und das Gleichungssystem ist schon in Normalform angegeben. Daher verwende ich die **Cramersche Regel** zur Lösung.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 4 & 3 & -2 \\ 12 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & -2 \\ 9 & 2 & 2 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{42 + 96 + 48 - 216 + 28 + 32}{30 + 72 + 24 - 162 + 20 + 16} \\ &= \frac{30}{0} \end{aligned}$$

Die Nennerdeterminante ist Null! Das bedeutet, das Gleichungssystem ist **unterbestimmt**, es gibt daher keine Lösung.

Lösungsvariante 2: Um zu zeigen, dass auch andere Lösungsverfahren nicht zu einem Ergebnis führen, verwende ich für einen zweiten Lösungsversuch das Additions-/Subtraktionsverfahren.

Zunächst fasse ich Gleichung (2) und (3) zu einer Gleichung zusammen, die ich (4) nenne.

$$\begin{array}{lrrrcll} (2) & 2x & +3y & -2z & = & 4 & | \\ (3) & 9x & +2y & +2z & = & 12 & |+ \\ \hline (4) & 11x & +5y & & = & 16 & \end{array}$$

Aus Gleichung (1) und (2) mache ich eine Gleichung (5).

$$\begin{array}{lrrrcll} (1) & 5x & -4y & +6z & = & 7 & \\ (2) & 2x & +3y & -2z & = & 4 & | \cdot 3 \\ \hline (1) & 5x & -4y & +6z & = & 7 & | \\ (2) & 6x & +9y & -6z & = & 12 & |+ \\ \hline (5) & 11x & +5y & & = & 19 & \end{array}$$

Vergleicht man nun diese beiden Gleichungen, dann fällt sofort auf, dass die linken Seiten identisch sind, auf der rechten Seite aber eine andere Zahl steht. Damit ist das Gleichungssystem **nicht lösbar**.

Lösungsvariante 3: Um zu zeigen, wie sich die Unlösbarkeit bei anderen Verfahren darstellt, setze ich jetzt eine Lösung mit dem **Einsetzungsverfahren** an.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x - 4y + 6z & = & 7 \\ (2) & 2x + 3y - 2z & = & 4 \\ (3) & 9x + 2y + 2z & = & 12 \end{array}$$

Ich löse Gleichung (2) nach x auf und setze das Ergebnis in die anderen Gleichungen ein.

$$\begin{array}{rcll} 2x + 3y - 2z & = & 4 & \mid -3y + 2z \\ 2x & = & 4 - 3y + 2z & \mid :2 \\ x & = & 2 - \dfrac{3}{2}y + z & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} \text{in (1)} & 5 \cdot \left(2 - \frac{3}{2}y + z\right) - 4y + 6z & = & 7 & \\ \text{in (3)} & 9 \cdot \left(2 - \frac{3}{2}y + z\right) + 2y + 2z & = & 12 & \\ \hline (1) & 10 - \frac{15}{2}y + 5z - 4y + 6z & = & 7 & \mid -10 \\ (3) & 18 - \frac{27}{2}y + 9z + 2y + 2z & = & 12 & \mid -18 \\ \hline (1) & -\frac{23}{2}y + 11z & = & -3 & \\ (3) & -\frac{23}{2}y + 11z & = & -6 & \\ \hline \end{array}$$

Auch hier haben wir wieder zwei Gleichungen erhalten, die auf der linken Seite identisch sind, auf der rechten Seite aber unterschiedliche Ergebnisse liefern sollen. Da das nicht sein kann, ist das Gleichungssystem **unlösbar**.

5.12 Aufgabe 12

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 3x - z + 2y & = & -4 \\ (2) & 3z - 2x + 5y & = & 12 \\ (3) & 5y - 5z + 3x & = & -20 \end{array} \qquad\qquad D = \mathbb{R}^3$$

Zunächst sollte das Gleichungssystem durch Sortieren in die Normalform gbracht werden.

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & 3x & +2y & -z & = & -4 \\ (2) & -2x & +5y & +3z & = & 12 \\ (3) & 3x & +5y & -5z & = & -20 \end{array}$$

Zur Abwechslung verwende ich hier das Einsetzungsverfahren. Gleichung (1) kann gut nach z umgestellt werden.

$$\begin{array}{rcll} 3x + 2y - z & = & -4 & |-3x-3y \\ -z & = & -4-3x-3y & |\cdot(-1) \\ z & = & 4+3x+3y & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (2) und in (3) eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcll} (2) & -2x + 5y + 3\cdot(4+3x+3y) & = & 12 & \\ (3) & 3x + 5y - 5\cdot(4+3x+3y) & = & -20 & \\ \hline (2) & -2x + 5y + 12 + 9x + 9y & = & 12 & |-12 \\ (3) & 3x + 5y - 20 - 15x - 15y & = & -20 & |+20 \\ \hline (2) & 7x + 14y & = & 0 & \\ (3) & -12x - 10y & = & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Gleichung (2) kann gut nach x umgestellt werden.

$$\begin{array}{rcll} 7x + 14y & = & 0 & |-14y \\ 7x & = & -14y & |:7 \\ x & = & -2y & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in (3) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} -12x - 10y & = & 0 & \\ -12\cdot(-2y) - 10y & = & 0 & \\ 24y - 10y & = & 0 & \\ 14y & = & 0 & |:14 \\ y & = & 0 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in die umgestellte Gleichung (2) eingesetzt.

$$x = -2y = -2\cdot 0 = 0$$

Beide Ergebnisse werden in die umgestellte Gleichung (1) eingesetzt.

$$z = 4 + 3x + 3y = z = 4 + 3\cdot 0 + 3\cdot 0 = 4$$

Die Lösungsmenge lautet: $\boxed{L = \{(0|0|4)\}}$

5.13 Aufgabe 13

$$\begin{array}{lrcl} (1) & -5x+3z & = & -19 \\ (2) & -4z+2x+3y & = & 19 \\ (3) & 3y+5z & = & -12 \qquad\qquad D=\mathbb{R}^3 \end{array}$$

Auch dieses Gleichungssystem sollte zunächst „geordnet" werden, damit man es besser überblickt.

$$\begin{array}{lrrrcl} (1) & -5x & & +3z & = & -14 \\ (2) & -2x & +3y & -4z & = & 13 \\ (3) & & 3y & +5z & = & -12 \end{array}$$

Es fällt auf, dass die Koeffizienten von y in Gleichung (2) und (3) übereinstimmen. Zudem fehlt in Gleichung (1) y ganz. Daher bietet es sich an, die Gleichungen (2) und (3) voneinander zu subtrahieren.

$$\begin{array}{lrrrcll} (2) & -2x & +3y & -4z & = & 13 & | \\ (3) & & 3y & +5z & = & -12 & |- \\ \hline (4) & -2x & & -9z & = & 25 & \end{array}$$

Übrig bleiben Gleichung (1) und (4) als Lineargleichungssystem 2. Ordnung.

$$\begin{array}{lrrcl} (1) & -5x & +3z & = & -14 \\ (4) & -2x & -9z & = & 25 \end{array}$$

Auch für den nächsten Reduktionsschritt bietet sich das Additionsverfahren an. Wenn vor dem Addieren (1) mit 3 multipliziert wird, fällt z weg.

$$\begin{array}{lrrcll} (1) & -5x & +3z & = & -14 & |\cdot 3 \\ (4) & -2x & -9z & = & 25 & \\ \hline (1) & -15x & +9z & = & -42 & | \\ (4) & -2x & -9z & = & 25 & |+ \\ \hline & -17x & & = & -17 & |:(-17) \\ & x & & = & 1 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (1) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} -5x+3z & = & -14 & \\ -5\cdot 1+3z & = & -14 & |+5 \\ 3z & = & -9 & |:3 \\ z & = & -3 & \end{array}$$

Das Ergebnis wird in Gleichung (3) eingesetzt.

$$\begin{array}{rcll} 3y+5z & = & -12 & \\ 3y+5\cdot(-3) & = & -12 & \\ 3y-15 & = & -12 & |+15 \\ 3y & = & 3 & |:3 \\ y & = & 1 & \end{array}$$

Die Lösungsmenge lautet: $\boxed{L=\{(1|1|-3)\}}$

5.14 Aufgabe 14

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 4x+3y+z & = & 0 \\ (2) & 3x+4y+5z & = & 0 \\ (3) & x-2y+z & = & 0 \end{array} \qquad D=\mathbb{R}^3$$

Da sich kein Verfahren besonders „aufdrängt“, verwende ich die Cramersche Regel.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{0+0+0-0-0-0}{16+15-6-4+40-9} \\ &= \frac{0}{52} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{52} \\ &= \frac{0+0+0-0-0-0}{52} \\ &= \frac{0}{52} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (1):

$$\begin{aligned} 4x+3y+z &= 0 \\ 4\cdot 0+3\cdot 0+z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet: $\boxed{L=\{(0|0|0)\}}$

5.15 Aufgabe 15

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2ax + ay + z & = & a \\ (2) & ax + 0{,}5by + bz & = & b^2 \\ (3) & ax + 2ay - 2bz & = & ab \end{array} \qquad D = \mathbb{R}^3$$

Eine Besonderheit liegt hier darin, dass die Gleichungen neben den **Variablen** x, y und z auch die **Parameter** a, b und c enthalten.

Zur Lösung möchte ich das Additions-/Subtraktionsverfahren verwenden. Dazu multipliziere ich die Gleichungen (2) und (3) jeweils mit 2.

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 2ax + ay + z & = & a \\ (2) & 2ax + by + 2bz & = & 2b^2 \\ (3) & 2ax + 4ay - 4bz & = & 2ab \end{array}$$

Gleichung (2) wird von Gleichung (1) subtrahiert:

$$\begin{array}{llllcll} (1) & 2ax & +ay & +z & = & a & | \\ (2) & 2ax & +by & +2bz & = & 2b^2 & |- \\ \hline (4) & & ay - by & +z - 2bz & = & a - 2b^2 & \\ (4) & & (a-b)\cdot y & +(1-2b)\cdot z & = & a - 2b^2 & \end{array}$$

Als nächstes muss auch noch Gleichung (3) mitverwendet werden. Ich subtrahiere daher Gleichung (3) von (1).

$$\begin{array}{llllcll} (1) & 2ax & +ay & +z & = & a & | \\ (3) & 2ax & +4ay & -4bz & = & 2ab & |- \\ \hline (5) & & ay - 4ay & +z + 4bz & = & a - 2ab & \\ (5) & & -3a\cdot y & +(1+4b)\cdot z & = & a - 2ab & \end{array}$$

Damit ist das Gleichungssystem 3. Ordnung reduziert auf ein Gleichungssystem 2. Ordnung.

$$\begin{array}{lrlcl} (4) & (a-b)\cdot y & +(1-2b)\cdot z & = & a - 2b^2 \\ (5) & -3a\cdot y & +(1+4b)\cdot z & = & a - 2ab \end{array}$$

Es steht uns für den nächsten Reduktionsschritt wieder frei, welches Vervahren wir anwenden wollen. Ich entscheide mich für das Einsetzungsverfahren und löse Gleichung (5) nach y auf.

$$\begin{array}{rcll} -3a\cdot y + (1+4b)\cdot z & = & a - 2ab & |-(1-4b)\cdot z \\ -3a\cdot y & = & a - 2ab - (1+4b)\cdot z & |:(-3a) \\ y & = & -\frac{1}{3} + \frac{2b}{3} + \frac{(1+4b)\cdot z}{3a} & \end{array}$$

Dieser Term wird für y in Gleichung (4) eingesetzt:

$$(a-b)\cdot\left(-\frac{1}{3} + \frac{2b}{3} + \frac{(1+4b)\cdot z}{3a}\right) + (1-2b)\cdot z \quad = \quad a - 2b^2$$

Hat man Brüche in einer Gleichung, empfiehlt es sich immer, die Gleichung **sofort** mit dem Hauptnenner zu multiplizieren. Dann verschwinden alle Brüche. Hier ist er Hauptnenner $3a$.

$$\begin{aligned}
(a-b)\cdot\left(-\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}+\frac{(1+4b)\cdot z}{3a}\right)+(1-2b)\cdot z &= a-2b^2 \qquad |\cdot 3a\\
(a-b)\cdot\Big(-a+2ab+(1+4b)\cdot z\Big)+(1-2b)\cdot 3az &= 3a^2-6ab^2\\
(a-b)\cdot(-a+2ab+z+4bz)+3az-6abz &= 3a^2-6ab^2\\
-a^2+2a^2b+az+4abz+ab-2ab^2-bz+4b^2z+3az-6abz &= 3a^2-6ab^2
\end{aligned}$$

Nun werden alle Terme, die z enthalten, auf die linke Seite sortiert (da sind sie schon), und alle Terme, die **kein** z enthalten, auf die rechte Seite.

$$\begin{aligned}
-a^2+2a^2b+az+4abz+ab-2ab^2-bz+4b^2z+3az-6abz &= 3a^2-6ab^2\\
4az-2abz-bz-4b^2z &= 4a^2-2a^2b-ab-4ab^2\\
(4a-2ab-b-4b^2)\cdot z &= 4a^2-2a^2b-ab-4ab^2\\
z &= \frac{4a^2-2a^2b-ab-4ab^2}{4a-2ab-b-4b^2}\\
z &= \frac{a\cdot(4a-2ab-b-4b^2)}{4a-2ab-b-4b^2}\\
z &= a
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis kann nun in die umgestellte Gleichung (5) eingesetzt werden, um y zu erhalten.

$$\begin{aligned}
y &= -\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}+\frac{(1+4b)\cdot z}{3a}\\
&= -\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}+\frac{(1+4b)\cdot a}{3a}\\
&= -\frac{1}{3}+\frac{2b}{3}+\frac{1+4b}{3}\\
&= \frac{-1+2b+1+4b}{3}\\
&= \frac{6b}{3}\\
y &= 2b
\end{aligned}$$

Jetzt fehlt nur noch x. Das kann durch Einsetzen der bekannten Werte in (1), (2) oder (3) bestimmt werden. Willkürlich wähle ich dazu Gleichung (3) aus.

$$\begin{aligned}
ax+2ay-2bz &= ab\\
ax+2a\cdot 2b-2b\cdot a &= ab\\
ax+4ab-2ab &= ab\\
ax+2ab &= ab \qquad |-2ab\\
ax &= -ab \qquad |:a\\
x &= -b
\end{aligned}$$

Hiermit kann die Lösungsmenge angegeben werden: $\boxed{L=\{(-b|2b|a)\}}$

5.16 Aufgabe 16

$$\begin{array}{lrcl} (1) & 5x-3y+4z & = & 1 \\ (2) & 2x+4y-2z & = & -14 \\ (3) & 3x-5y+3z & = & 3 \qquad\qquad D=\mathbb{R}^3 \end{array}$$

Hier haben wir wieder keine Besonderheit, die für Einsetz- oder Additions-/Subtraktionsverfahren spricht. Deshalb verwende ich der Einfachheit halber die Cramersche Regel.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -14 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{12+18+280-48-10-126}{60+18-40-48-50+18} \\ &= \frac{126}{-42} \\ x &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 2 & -14 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{52} \\ &= \frac{-210-6+24+168+30-6}{-42} \\ &= \frac{0}{-42} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Eingesetzt in (1):

$$\begin{aligned} 5x-3y+4z &= 1 \\ 5\cdot(-3)-3\cdot 0+4z &= 1 \\ -15+4z &= 1 \quad |+15 \\ 4z &= 16 \quad |:4 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet: $\boxed{L=\{(-3|0|4)\}}$

5.17 Aufgabe 17

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & abx - 2aby + 2bz & = & 3ab \\
(2) & -2ax + 4by + 10z & = & a - 4b \\
(3) & 3bx - 6ay & = & 0 \qquad\qquad D = \mathbb{R}^3
\end{array}$$

Bei diesem Gleichungssystem fällt auf, dass Gleichung (3) kein z enthält. Also sollte man Gleichung (1) und (2) so kombinieren, dass dort auch z wegfällt. Das geht am besten mit dem Additions-/Subtraktionsverfahren.

$$\begin{array}{lrrrcll}
(1) & abx & -2aby & +2bz & = & 3ab & |\cdot 5 \\
(2) & -2ax & +4by & +10z & = & a-4b & |\cdot b \\
\hline
(1) & 5abx & -10aby & +10bz & = & 15ab & | \\
(2) & -2abx & +4b^2y & +10bz & = & ab-4b^2 & |- \\
\hline
(4) & 7abx & -10aby - 4b^2y & & = & 14ab+4b^2 &
\end{array}$$

Wir haben die Gleichungen (3) und (4) zur Weiterbearbeitung, die jetzt nur noch die Variablen x und y enthalten.

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl}
(3) & 3bx & -6ay & = & 0 \\
(4) & 7abx & -10aby - 4b^2y & = & 14ab+4b^2
\end{array}}$$

Für den nächsten Reduktionsschritt verwende ich wieder das Additions-/Subtraktionsverfahren, da die Parameter von x relativ einfach gleich gemacht werden können.

$$\begin{array}{lrrcll}
(3) & 3bx & -6ay & = & 0 & |\cdot 7a \\
(4) & 7abx & -10aby - 4b^2y & = & 14ab+4b^2 & |\cdot 3 \\
\hline
(3) & 21abx & -42a^2y & = & 0 & | \\
(4) & 21abx & -30aby - 12b^2y & = & 42ab+12b^2 & |- \\
\hline
 & & -42a^2y + 30aby + 12b^2y & = & -42ab - 12b^2 &
\end{array}$$

Diese Gleichung muss nun nach y umgestellt werden.

$$\begin{aligned}
-42a^2y + 30aby + 12b^2y &= -42ab - 12b^2 \\
(-42a^2 + 30ab + 12b^2)\cdot y &= -42ab - 12b^2 \qquad |:(-42a^2 + 30ab + 12b^2) \\
y &= \frac{-42ab - 12b^2}{-42a^2 + 30ab + 12b^2}
\end{aligned}$$

Man kann nun versuchen, im Zähler und Nenner möglichst viel auszuklammern, damit ein Kürzen möglich wird.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-42ab - 12b^2}{-42a^2 + 30ab + 12b^2} \\
y &= \frac{(-7a-2b)\cdot 6b}{(-7a^2 + 5ab + 2b^2)\cdot 6} \\
y &= \frac{(-7a-2b)\cdot b}{-7a^2 + 5ab + 2b^2}
\end{aligned}$$

Auf den ersten Blick geht es hier nicht weiter. Mit Hilfe einer Polynomdivision[3] kann man prüfen, ob eventuell der Faktor $(-7a - 2b)$ des Zählers auch als Faktor im Nenner enthalten ist.

$$\begin{array}{rrrl}
(-7a^2 & +5ab & +2b^2) & : \; (-7a-2b) \; = \; a-b \\
-(-7a^2 & -2ab) & & \\
\hline
 & 7ab & +2b^2 & \\
- & (7ab & +2b^2) & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

Hiermit kann der Nenner faktorisiert werden, man kann kürzen.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{(-7a-2b)\cdot b}{-7a^2+5ab+2b^2} \\
&= \frac{(-7a-2b)\cdot b}{(-7a-2b)\cdot(a-b)} \\
y &= \frac{b}{a-b}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (3) kann nun x bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
3bx - 6ay &= 0 \\
3bx - 6a\cdot\frac{b}{a-b} &= 0 \\
3bx - \frac{6ab}{a-b} &= 0 \qquad \left| + \frac{6ab}{a-b}\right. \\
3bx &= \frac{6ab}{a-b} \quad |: 3b \\
x &= \frac{2a}{a-b}
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung von z setze ich die gefundenen Werte in Gleichung (1) ein.

$$\begin{aligned}
abx - 2aby + 2bz &= 3ab \\
ab\cdot\frac{2a}{a-b} - 2ab\cdot\frac{b}{a-b} + 2bz &= 3ab \\
\frac{2a^2b}{a-b} - \frac{2ab^2}{a-b} + 2bz &= 3ab \qquad |\cdot(a-b) \\
2a^2b - 2ab^2 + 2abz - 2b^2z &= 3a^2b - 3ab^2 \quad |-2a^2b+2ab^2 \\
2abz - 2b^2z &= a^2b - ab^2 \\
(2ab-2b^2)\cdot z &= a^2b - ab^2 \qquad |:(2ab-2b^2) \\
z &= \frac{a^2b-ab^2}{2ab-2b^2} \\
z &= \frac{a\cdot(ab-b^2)}{2\cdot(ab-b^2)} \\
z &= \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

[3]Einzelheiten zur Polynomdivision siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/polynomd.pdf

Die Lösungsmenge lautet: $\boxed{L = \left\{ \left(\frac{2a}{a-b} \middle| \frac{b}{a-b} \middle| \frac{a}{2} \right) \right\}}$

5.18 Aufgabe 18

$$\begin{array}{lrcl}(1) & 2ax - by & = & 4a^2 + b^2 \\ (2) & 2b(x+y) - a(x-y) & = & 6ab\end{array}$$

Lösung: Zuerst muss noch Gleichung (2) in die Normalform gebracht werden.

$$\begin{aligned}2b(x+y) - a(x-y) &= 6ab \\ 2bx + 2by - ax + ay &= 6ab \\ (2b-a)\cdot x + (a+2b)\cdot y &= 6ab\end{aligned}$$

Hiermit sieht das Gleichungssystem wie folgt aus:

$$\boxed{\begin{array}{lrrcl}(1) & 2a\cdot x & -b\cdot y & = & 4a^2 + b^2 \\ (2) & (2b-a)\cdot x & +(a+2b)\cdot y & = & 6ab\end{array}}$$

Für die Lösung möchte ich das Additions-Subtraktionsverfahren verwenden. Um y zu eliminieren multipliziere ich Gleichung (1) mit $(a+2b)$ und Gleichung (2) mit b.

$$\begin{array}{lrrcll}(1) & 2a\cdot x & -b\cdot y & = & 4a^2 + b^2 & |\cdot(a+2b) \\ (2) & (2b-a)\cdot x & +(a+2b)\cdot y & = & 6ab & |\cdot b \\ \hline (1) & (2a^2+4ab)\cdot x & -b\cdot(a+2b)\cdot y & = & 4a^3 + 8a^2b + ab^2 + 2b^3 & | \\ (2) & (2b^2-ab)\cdot x & +b\cdot(a+2b)\cdot y & = & 6ab^2 & |+ \\ \hline & (2a^2+3ab+2b^2)\cdot x & & = & 4a^3 + 8a^2b + 7ab^2 + 2b^3 & |:(2a^2+3ab+2b^2) \\ & x & & = & \dfrac{4a^3 + 8a^2b + 7ab^2 + 2b^3}{2a^2+3ab+2b^2} & \end{array}$$

Dieser Bruch kann mit Hilfe einer Polynomdivision[4] aufgelöst werden.

$$\begin{array}{rrrrcccc}(4a^3 & +8a^2b & +7ab^2 & +2b^3) & : & (2a^2+3ab+2b^2) & = & 2a+b \\ -(4a^3 & +6a^2b & +4ab^2) & & & & & \\ \hline & 2a^2b & +3ab^2 & +2b^3 & & & & \\ - & (2a^2b & +3ab^2 & +2b^3) & & & & \\ \hline & & & 0 & & & & \end{array}$$

Damit erhalten wir das Ergebnis:

$$x = 2a + b$$

Das Ergebnis wird in (1) eingesetzt, um y zu erhalten:

$$\begin{array}{rcll}2a\cdot x - b\cdot y & = & 4a^2 + b^2 & \\ 2a\cdot(2a+b) - b\cdot y & = & 4a^2 + b^2 & \\ 4a^2 + 2ab - b\cdot y & = & 4a^2 + b^2 & |-4a^2 - 2ab \\ -b\cdot y & = & -2ab + b^2 & |:(-b) \\ y & = & 2a - b & \end{array}$$

Die Lösungsmenge lautet: $\boxed{L = \{(2a+b|2a-b)\}}$

[4]Einzelheiten zur Polynomdivision siehe hier: http://www.dk4ek.de/lib/exe/fetch.php/polynomd.pdf

5.19 Aufgabe 19

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 2x_1+3x_2+3x_4 & = & 3\\
(2) & 3x_1-2x_3-4x_4 & = & 3\\
(3) & 4x_2-x_3+4x_4 & = & -3\\
(4) & 3x_1+2x_2+x_3 & = & 2
\end{array}$$

Nicht in jeder Gleichung dieses Lineargleichungssystems 4. Grades kommen alle Variablen vor. Daher ist es sinnvoll, zunächst eine Struktur in das System zu bringen.

$$\begin{array}{llllllll}
(1) & 2x_1 & +3x_2 & & +3x_4 & = & 3\\
(2) & 3x_1 & & -2x_3 & -4x_4 & = & 3\\
(3) & & 4x_2 & -x_3 & +4x_4 & = & -3\\
(4) & 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & & = & 2
\end{array}$$

Für den ersten Reduktionsschritt wähle ich das Einsetzungsverfahren. Ich löse Gleichung (4) nach x_3 auf.

$$\begin{array}{rcll}
3x_1+2x_2+x_3 & = & 2 & |-3x_1-2x_2\\
x_3 & = & 2-3x_1-2x_2 &
\end{array}$$

Diesen Term setze ich in (2) und (3) ein. Gleichung (1) bleibt, wie sie ist, da hier x_3 nicht vorkommt.

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 2x_1+3x_2+3x_4 & = & 3\\
(2) & 3x_1-2\cdot(2-3x_1-2x_2)-4x_4 & = & 3\\
(3) & 4x_2-(2-3x_1-2x_2)+4x_4 & = & -3\\
\hline
(1) & 2x_1+3x_2+3x_4 & = & 3\\
(2) & 3x_1-4+6x_1+4x_2-4x_4 & = & 3\\
(3) & 4x_2-2+3x_1+2x_2+4x_4 & = & -3\\
\hline
(1) & 2x_1+3x_2+3x_4 & = & 3\\
(2) & 9x_1+4x_2-4x_4 & = & 7\\
(3) & 3x_1+6x_2+4x_4 & = & -1\\
\hline
\end{array}$$

Da keine Besonderheiten vorliegen verwende ich für die weitere Lösung die Cramersche Regel. Beginnen wir mit x_1.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3\\ 7 & 4 & -4\\ -1 & 6 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3\\ 9 & 4 & -4\\ 3 & 6 & 4\end{vmatrix}}\\
&= \frac{48+12+126+12+72-84}{32-36+162-36+48-108}\\
&= \frac{186}{62}\\
x_1 &= 3
\end{aligned}$$

Es geht weiter mit x_2.

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 9 & 7 & -4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 9 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{56 - 36 - 27 - 63 - 8 - 108}{62} \\
&= \frac{-186}{62} \\
x_2 &= -3
\end{aligned}$$

Die Variable x_4 kann am einfachsten durch Einsetzen der Werte für x_1 und x_2 in eine der drei zuletzt verwendeten Gleichungen bestimmt werden. Ich verwende dazu Gleichung (1).

$$\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 3x_4 &= 3 \\
2 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) + 3x_4 &= 3 \\
6 - 9 + 3x_4 &= 3 \quad | + 3 \\
3x_4 &= 6 \quad | : 3 \\
x_4 &= 2
\end{aligned}$$

Da wir mit dem Einsetzungsverfahren begonnen haben, können wir alle bekannten Werte in die umgestellte Gleichung (4) einsetzen, um x_3 zu bestimmen.

$$x_3 = 2 - 3x_1 - 2x_2 = 2 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-3) = 2 - 9 + 6 = -1$$

Die Lösungsmenge lautet: $\boxed{L = \{(3| -3| -1|2)\}}$

5.20 Aufgabe 20

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 3 \\
(2) & x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 3 \\
(3) & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 8 \\
(4) & 6x_1 - 5x_2 - 8x_3 + 2x_4 & = & 20
\end{array}$$

In Gleichung (3) kommt die Variable x_4 nicht vor. Deshalb stelle ich diese Gleichung nach x_1 um und verwende das Einsetzungsverfahren.

$$\begin{array}{rcll}
2x_1 - 2x_2 + 2x_3 & = & 8 & | + 2x_2 - 2x_3 \\
2x_1 & = & 8 + 2x_2 - 2x_3 & | : 2 \\
x_1 & = & 4 + x_2 - x_3 &
\end{array}$$

Das Ergebnis wird in (1), (2) und (4) eingesetzt.

$$\begin{array}{lrcl}
(1) & 5 \cdot (4 + x_2 - x_3) + 3x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 3 \\
(2) & (4 + x_2 - x_3) - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 3 \\
(4) & 6 \cdot (4 + x_2 - x_3) - 5x_2 - 8x_3 + 2x_4 & = & 20 \\
\hline
(1) & 20 + 5x_2 - 5x_3 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 & = & 3 \\
(2) & 4 + x_2 - x_3 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 3 \\
(4) & 24 + 6x_2 - 6x_3 - 5x_2 - 8x_3 + 2x_4 & = & 20 \\
\hline
(1) & 8x_2 - 9x_3 + x_4 & = & -17 \\
(2) & -x_2 - 3x_3 + 3x_4 & = & -1 \\
(4) & x_2 - 14x_3 + 2x_4 & = & -4
\end{array}$$

Dieses Gleichungssystem kann nun gut mit der Cramerschen Regel gelöst werden.

$$\begin{array}{rcl}
x_2 & = & \dfrac{\begin{vmatrix} -17 & -9 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ -4 & -14 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -9 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & -14 & 2 \end{vmatrix}} \\
 & = & \dfrac{102 + 108 + 14 - 12 - 714 - 18}{-48 - 27 + 14 + 3 + 336 - 18} \\
 & = & \dfrac{-520}{260} \\
x_2 & = & -2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
x_3 & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 8 & -17 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}}{260} \\
 & = & \dfrac{-16 - 51 + 4 + 1 + 96 - 34}{260} \\
 & = & \dfrac{0}{260} \\
x_3 & = & 0
\end{array}$$

Die nächste Variable kann z.B. durch Einsetzen der bekannten Werte in die umgestellte Gleichung (2) bestimmt werden.

$$\begin{array}{rcll} -x_2 - 3x_3 + 3x_4 & = & -1 & \\ -(-2) - 3 \cdot 0 + 3x_4 & = & -1 & | -2 \\ 3x_4 & = & -3 & | : 3 \\ x_4 & = & -1 & \end{array}$$

Fehlt nur noch x_1. Zur Berechnung wird die umgestellte Gleichung (3) verwendet.

$$x_1 = 4 + x_2 - x_3 = 4 + (-2) - 0 = 2$$

Die Lösungsmenge lautet: $\boxed{L = \{(2| -2|0| -1)\}}$